PROGETTO GUIDA ALLO STUDIO

MATEMATICA

Il numero e

Giovanni Zingales

Il numero *e*

Premessa

Si riserva il termine *successione* a quelle particolari funzioni il cui dominio coincide con l'insieme dei numeri naturali: $D = \boldsymbol{N}$; in tali casi, la variabile indipendente viene indicata, anziché con la solita x, con la lettera n; e il valore che la funzione associa ad ogni n viene indicato con a_n anziché con $f(n)$.
Si usa presentare una successione dicendo, di solito:
"sia data la successione di *termine generale* a_n = . . . "; per esempio

$$a_n = \frac{1}{n}$$

e non occorre specificare che la variabile n assume tutti i valori $n = 1,2,3, \ldots$; nel nostro esempio, i valori corrispondenti saranno, nell'ordine – ovvero in successione −:

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = \tfrac{1}{2},\ \ a_3 = \tfrac{1}{3},\ \ \ldots \text{ ecc.}$$

Ovviamente, per le successioni ha senso calcolare solo il limite per $n \to +\infty$.
Nel nostro esempio si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fatta questa brevissima premessa, passiamo a occuparci del numero e.

* * * * *

Il numero e.

1. Il numero e viene definito come limite della successione di termine generale

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo innanzi tutto che per $n \to +\infty$, il limite presenta la forma indeterminata 1^{∞}; e diciamo subito che non si riesce a eliminare tale indeterminazione. Tuttavia, il calcolo del limite – ancorché non immediato −, è reso possibile dal procedimento di seguito illustrato.

Cominciamo a scoprire − inizialmente in modo intuitivo −, alcune proprietà della successione, elencando alcuni termini. Se si assegnano a n, nell'ordine, i valori

$$n = 1,2,3,4,\ldots$$

si hanno in corrispondenza, nell'ordine, i seguenti termini della successione

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25, \quad a_3 = \frac{64}{27} = 2{,}37\ldots, \quad a_4 = \frac{625}{256} = 2{,}44\ldots$$

Si nota che risulta

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

cioè ogni termine è maggiore del precedente, e questo, almeno per i primi quattro termini, si esprime dicendo che la successione è *crescente*. Tuttavia, questi quattro termini da soli non bastano per concludere cha la successione è crescente: il primo passo sarà quindi di di mostrare che, in generale, $a_n < a_{n+1}$, cioè

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{per ogni } n.$$

Si può notare inoltre che i termini della successione crescono "lentamente", nel senso che la differenza tra un termine e il termine precedente sembra diventare sempre più piccola per valori di n crescenti.

Il secondo passo è scoprire se, e come, questa tendenza è confermata per tutti i valori di n. Si troverà che la successione è *limitata superiormente* dal numero 3, ovvero che risulta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \text{per ogni } n.$$

Per quanto visto sopra, la successione è anche *limitata inferiormente* dal numero 2; si ha quindi

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad \text{per ogni } n.$$

A questo punto si invoca un importante teorema sulle successioni *monotone* (cioè, crescenti o decrescenti) dovuto al matematico francese Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) secondo cui la successione ammette limite in quanto crescente, e tale limite dev'essere un numero finito in quanto la successione è anche limitata.

Calcolando valori di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per valori n sempre più grandi, si trova che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\ldots$ dove i puntiti di sospensione indicano che si tratta di un numero irrazionale. Questo numero viene indicato con la lettera *e*: si pone $e = 2{,}71\ldots$ dando, come si fa di solito con $\pi = 3{,}14\ldots$, le prime due cifre decimali. Si ha quindi, *per definizione*:

$$\boxed{e \coloneqq \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Il numero appena definito è chiamato numero di Nepero (nome latino dello scozzese *John Napier* (1550-1617) inventore dei logaritmi) in quanto base dei logaritmi neperiani (o naturali) e anche, forse più propriamente, numero di Eulero (nome latino del matematico svizzero *Leonhard Euler* (1707-1783) che per primo usò la lettera *e* per indicare tale numero).

Avendo a questo punto introdotto, nel modo indicato, il numero *e*, si passa poi a dimostrare il limite fondamentale

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

2. Passiamo ora alla dimostrazione dei vari passaggi del percorso illustrato.

a) Cominciamo a provare che la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente.

Ricordiamo la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2 + \ \ldots\ + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

e il significato dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{k!} \quad \text{con, in particolare, } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Ponendo $a = 1$ e $b = \frac{1}{n}$, possiamo sviluppare a_n nel modo seguente:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}\cdot 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ .\ .\ .\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ .\ .\ .\ \cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \ .\ .\ .\ + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ .\ .\ .\ \cdot 2\cdot 1}{n^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ .\ .\ .\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdot\ \ .\ .\ .\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Da qui si può subito ricavare lo sviluppo di a_{n+1} cambiando n con $n+1$:

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ .\ .\ .\ +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdot\ \ .\ .\ .\ \left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ \ .\ .\ .\ \left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Si nota che, non solo c'è un addendo in più rispetto allo sviluppo di a_n , ma tutti i nuovi termini, a parte il primo, sono ordinatamente maggiori dei precedenti: per esempio, $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Si può quindi concludere che risulta $a_{n+1} > a_n$, e ciò prova che la successione è crescente.

b) Dimostriamo ora che la successione è *limitata superiormente*. Osserviamo che nello sviluppo di a_n

$$2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ .\ .\ .\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdot\ \ .\ .\ .\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

tutti i termini dentro le parentesi sono < 1, e pertanto risulta

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ .\ .\ .\ + \frac{1}{n!}$$

Si può notare inoltre che risulta $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2\cdot 2}$, $\frac{1}{4!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}$, e così per gli altri termini; vale quindi la diseguaglianza

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ .\ .\ .\ + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ .\ .\ .\ + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

in cui i termini dentro le parentesi formano una *progressione geometrica* di *ragione* $\frac{1}{2}$ e *primo termine* 1 (ogni termine della progressione, eccetto il primo, si ottiene dal precedente moltiplicando per $\frac{1}{2}$); ricordando la formula

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ . \ . \ . \ + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

ponendo $q = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

Si osserva infine che risulta $\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ e si conclude che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$$

e questo prova che la successione è limitata superiormente dal numero 3.

c) Dimostriamo, da ultimo, che risulta

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Cominciamo con l'osservare che se x è un numero reale, con $x \geq 1$, per esempio $x = \sqrt{5} = 2{,}236\ . \ . \ .$, esistono due interi consecutivi tra cui esso è compreso, e precisamente: $2 < 2{,}236 \ldots < 3$; in generale, quindi, possiamo scrivere $n \leq x < n + 1$, tenendo conto che x stesso può essere intero.
Passando ai reciproci si ha allora:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

da cui, aggiungendo 1 a ciascun termine, si ottiene

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Elevando, nell'ordine, agli esponenti n, x e $n + 1$, ricordando che $n \leq x < n + 1$, si conserva ancora il segno delle diseguaglianze:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Ora, quando $x \to +\infty$ anche $n \to +\infty$, e a maggior ragione, $(n+1) \to +\infty$; se dimostriamo che entrambe le successioni

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \quad \text{e} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

tendono a uno stesso limite, allora anche $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tenderà allo stesso limite (teorema del *confronto*, detto anche dei due *carabinieri*).

Calcoliamo il limite della prima successione. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}{\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \frac{e}{1} = e \quad \text{(avendo posto } t = n+1\text{)}$$

Calcoliamo il limite dell'altra:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

Entrambe le successioni che "imprigionano" $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tendono allo stesso limite e; ciò basta per concludere che anche $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ non può che avere limite e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$